



φροντιστήριο με όραμα και στόχο

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026



Κυρίτσας

φροντιστήριο με όραμα και στόχο

Κύπριων Ηρώων 42B, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524

e-mail: info@kyritsis-education.gr

kyritsis-education.gr

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. βιβλίο σελ. 133

A2. Σχολ. βιβλίο σελ. 51

A3. Σχολ. βιβλίο σελ. 185

A4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_h = A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = (2, +\infty)$

αφού $x \geq 2$ και $g(x) > 1$

$$\sqrt{x-2} + 1 > 1$$

$$\sqrt{x-2} > 0$$

$$x - 2 > 0$$

$$x > 2$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = 2 \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) = \ln(x-2) \end{aligned}$$

B2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη γιατί είναι σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ αφού } x > 2$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$ είναι δηλ. αντιστρέψιμη

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

όπου

$$u = x - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ και } x > 2 \Rightarrow u = x - 2 > 0 \Rightarrow u > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

όπου

$$u = x - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $A_h = (2, +\infty)$ έχει σύνολο τιμών

$$h((2, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty) \Rightarrow A_{h^{-1}} = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Αν } h(x) = y \Rightarrow \ln(x - 2) = y \Rightarrow x - 2 = e^y \Rightarrow x = e^y + 2$$

$$\text{Από } h(x) = y \Rightarrow x = h^{-1}(y) \text{ οπότε ισχύει } h^{-1}(y) = e^y + 2$$

Η αντίστροφη συνάρτηση έχει

πεδίο ορισμού $A_{h^{-1}} = (-\infty, +\infty)$ και τύπο $h^{-1}(x) = e^x + 2$

Β3. Αφού $x > 2$ στο όριο εννοείται $x \rightarrow 2^+$

Πρώτα θα βρούμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \left(\frac{0}{0} \right)^{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right] =$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln(x-2) \cdot \frac{\ln(x-1)}{x-2} \right] =$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = 2 \cdot 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x(x^2 + 1)} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^3 + x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^3} = 0 \Rightarrow \kappa = 0\end{aligned}$$

Ο τύπος της συνάρτησης γίνεται

$$f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} αφού είναι πηλίκο παραγωγίσιμων στο \mathbb{R} συναρτήσεων

$$f'(x) = \mu \cdot \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \mu \cdot \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Αφού η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $O(0, f(0))$ είναι η ευθεία $y = x$ τότε ισχύουν $f(0) = 0$ (προφανώς) και

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \mu \cdot \frac{0^2 + 1}{(0^2 + 1)^2} = 1 \Rightarrow \mu = 1$$

Γ2. Ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ για $x \in \mathbb{R}$

Ο τύπος της παράγωγης συνάρτησης γίνεται

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{i. Αν } f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \stackrel{x^2 + 1 > 0}{\Rightarrow} -x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)		-	+	0	-
f(x)					

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$ και $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$ λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο -1

$f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$ και $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$ λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο 1

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ και συνεχής άρα έχει επιμέρους σύνολο τιμών

$$f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = (-1, 1]$ και συνεχής άρα έχει επιμέρους σύνολο τιμών

$$f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), f(1)] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = (1, +\infty)$ και συνεχής άρα έχει επιμέρους σύνολο τιμών

$$f(A_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, \frac{1}{2})$$

Το σύνολο τιμών είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Παρατηρούμε ότι αν

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \alpha^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Άρα αν $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ τότε $\alpha^2 \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$

είναι αδύνατη

Αν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση $x = 1$

Γ3.ι. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

$$\text{ii. } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 [\ln(x^2+1)]' dx =$$

$$\frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow I_0 = \frac{\ln 2}{2}$$

Αν $v = 0$ η σχέση που αποδείχτηκε στο Γ3.ι. γράφεται

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \Rightarrow I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

Αν $v = 1$ η σχέση που αποδείχτηκε στο Γ3.ι. γράφεται

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο \mathbb{R} αφού είναι παραγωγίσιμη

Θεωρούμε συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = g(x) + x$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο \mathbb{R} γιατί είναι άθροισμα συνεχών

στο \mathbb{R} συναρτήσεων, άρα η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$

$h(0) = g(0) > 0$ αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) > 0$

$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) < 1 \Rightarrow g(x) - 1 < 0$

$h(0) \cdot h(-1) < 0$ άρα από το Θ. BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} γιατί είναι άθροισμα

παραγωγίσιμων στο \mathbb{R} συναρτήσεων

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και συνεχής αφού g' συνεχής στο \mathbb{R}

Η h' διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} , οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως

μονότονη άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική λύση οπότε

το $x_1 \in (-1, 0)$ είναι μοναδικό

Δ.2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ άρα είναι

παραγωγίσιμη στο 0 άρα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] = 0$$

ξέρουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon\phi x}{x} - \kappa \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} =$$

$$2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow 0 = 3 - \kappa \Rightarrow \kappa = 3$$

Δ3.ι. Ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ για $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

Ο τύπος της παράγωγης συνάρτησης γίνεται

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)[2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + \sigma\upsilon\nu x - 1]}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα για $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ οπότε αν

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ για } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και συνεχής άρα έχει

$$\text{σύνολο τιμών } f([0, \frac{\pi}{2})) = [f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)) = [0, +\infty)$$

$$\frac{\pi}{3} \in f([0, \frac{\pi}{2})) \text{ άρα υπάρχει } x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_2) = \frac{\pi}{3} \text{ και αφού η}$$

συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$ το x_2 είναι μοναδικό

Δ4.ι. Από το Δ1. είχαμε ότι η h' διατηρεί πρόσημο στο

Αν $h'(x) < 0$ για $x \in$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα

$$x_1 < 0 \Rightarrow h(x_1) > h(0) \Rightarrow 0 > g(0) \text{ \textit{άτοπο}}$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$x_1 \leq x \leq 0 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x) \leq h(0) \Rightarrow 0 \leq h(x) \leq g(0) \Rightarrow h(x) \geq 0 \text{ για } x \in [x_1, 0]$$

Αλλά για $x \in [x_1, 0]$ ισχύει $f(x) = x^2 \cdot h(x) \geq 0$

ii. Προφανώς

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx \text{ αλλά το πρόσημο της συνάρτησης είναι γνωστό}$$

$$\text{από τα } \Delta 3.ii. \text{ και } \Delta 4.i. \text{ και } f(x) \geq 0 \text{ οπότε } E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} f(x) dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$\text{Από τα ισεμβαδικά χωρία έχουμε } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$E_1 = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx =$$

$$\int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} \cdot g'(x) dx - \frac{x^4}{4} =$$

$$-\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = -\frac{x_1^3}{3} \cdot (-x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} =$$

$$\frac{x_1^4}{3} - \frac{x_1^4}{4} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx$$

$$E_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx - 3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$2[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln|\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \Rightarrow \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot \mathbf{g}'(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^0 x^3 \cdot \mathbf{g}'(x) dx = 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^3 \cdot \mathbf{g}'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 + 3$$